代数幾何学シンポジウム記録
1991年度 pp.148-159

カスプ特異点の双対性

東北大学理学部　石田正典　(Masanori Ishida)

1　T複体

まずトーリック多様体の理論で出てくる完備扇の拡張であるT複体について説明する。[Od] にある「石田の複体」とは関係なく単体的複体に近いものです。

r を正の整数とし $N := \mathbf{Z}^r$ とする。実空間 $N_{\mathbf{R}} := N \otimes \mathbf{R}$ の部分集合 S が任意の正の実数 c に対して $cS = S$ となるとき S を錐体という。錐体 σ が非特異錐体であるとは N のある基底 $\{x_1, \cdots, x_r\}$ と $0 \leq d \leq r$ があって$\sigma = \mathbf{R}_0 x_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 x_d$ となることとする。ここで $\mathbf{R}_0$ は負でない実数全体である。集合 $\{x_1, \cdots, x_d\}$ は σ に対して一意的に定まるので、これを $\mathrm{gen}\,\sigma$ と書くことにする。2つの非特異錐体 σ, τ が $\mathrm{gen}\,\tau \subset \mathrm{gen}\,\sigma$ を満たすとき τ は σ の面であると云い$\tau \prec \sigma$ と書く。

M を N の双対加群 $\mathrm{Hom}(N, \mathbf{Z})$ とし、$M_{\mathbf{R}} := M \otimes \mathbf{R}$ とすると自然な完全双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}$ が得られる。$N_{\mathbf{R}}$ の非特異錐体 σ に対して双対錐体 $\sigma^{\vee}$ が

$$\sigma^{\vee} := \{x \in M_{\mathbf{R}}\,;\, \langle x, a \rangle \geq 0, \forall a \in \sigma\}$$

で定義される。

さて k を任意標数の体とする。単位元を持つ可換半群 $M \cap \sigma^{\vee}$ から作られた半群環 $k[M \cap \sigma^{\vee}]$ は k 上有限生成の正規環であり商体は群環 $k[M]$ のそれと等しい。アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, k[M \cap \sigma^{\vee}]$ を $U(\sigma)$ と置く。

$N_{\mathbf{R}}$ の錐体の空でない集合 Δ が非特異扇であるとは条件

(1) $\sigma \in \Delta$ かつ $\tau \prec \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ である。

(2) $\sigma, \tau \in \Delta$ に対し $\sigma \cap \tau$ はσ と τ の両方の面である。

を満たすこととする。1つの非特異錐体 π に対し、その面全体の集合 $F(\pi)$ は非特異扇である。

$\mathrm{G_m}$ を k の乗法群とし、代数的トーラス $T_N := \mathrm{G_m} \otimes N$ を考える。T_N をトーラスとするトーリック多様体とは k 上定義された代数的正規スキームで T_N を開部分スキームとして含み、しかも T_N のそれ自身への作用が全体に正則に延びているものとする。ただし、準コンパクト性は仮定せず局所有限生成でよいことにする。$T_N = \mathrm{Spec}\, k[M]$ であることに注意すればアフィンスキーム $U(\sigma)$ はトーリック多様体であることがわかる。また、Δ を非特異扇とすると

$$X(\Delta) := \bigcup_{\sigma \in \Delta} U(\sigma)$$

は特異点を持たないトーリック多様体となる。

ρ が $N_{\mathbf{R}}$ の非特異錐体であるとき、$N[\rho] := N/(N \cap (\rho + (-\rho)))$ と置き、$N[\rho]_{\mathbf{R}} := N[\rho] \otimes \mathbf{R}$ とする。ρ を含む非特異錐体 σ に対し、その $N[\rho]_{\mathbf{R}}$ への像を $\sigma[\rho]$ と書き、また ρ が非特異扇 Δ に含まれるとき、Δ の ρ でのリンクを $\Delta[\rho] := \{\sigma[\rho]\,;\,\sigma \in \Delta(\rho\prec)\}$ と定義する。ここで$\Delta(\rho\prec) := \{\sigma \in \Delta\,;\,\rho \prec \sigma\}$ である。$\Delta[\rho]$ は $r - \dim\rho$ 次元空間 $N[\rho]_{\mathbf{R}}$ の非特異扇となる。これから作られるトーリック多様体は $X(\Delta)$ のある $r - \dim\rho$ 次元の T_N軌道の閉包 $V(\rho)$ と自然に同型である。[Od, Cor.1.7] 参照)

次の事実がトーリック多様体の理論の基本定理である。

定理 1.1 1 対 1 対応

$$\{\text{ 非特異扇 } \Delta\} \longleftrightarrow \{\text{ 非特異トーリック多様体 } X(\Delta)\}$$

が存在する。

さらに、トーリック多様体の様々な性質が非特異扇により記述出来る。例えば、$X(\Delta)$ が準コンパクトとなる必要十分条件はΔ が有限集合となることである。また、$X(\Delta)$ が完備代数多様体となるのは Δ が有限かつ $|\Delta| := \bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$ となることである。このような扇を非特異完備扇という。

複素領域に離散群が自由に作用していて、その商空間がコンパクト複素多様体となることはよくあるが、非特異扇を領域のように考え、次のような非特異完備扇の類似物を考えることが出来る。

凸とは限らない開錐体 $C \subset N_{\mathbf{R}}$ と $N_{\mathbf{R}}$ の扇$\tilde{\Delta}$ 及び群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}(r, \mathbf{Z})$ の組 $(C, \tilde{\Delta}, \Gamma)$ で条件

(1) $\tilde{\Delta}$ は C で局所有限で $|\tilde{\Delta}| = C \cup \{0\}$.

(2) Γ は C に自由に作用し $\tilde{\Delta}$ への作用を引き起こす。

(3) $(\tilde{\Delta}\setminus\{\mathbf{0}\})/\Gamma$ は有限。

を満たすとする。このとき $\Delta := (\tilde{\Delta}\setminus\{\mathbf{0}\})/\Gamma$ がそれである。ここで Δ には扇の要にあたる $\mathbf{0} := \{0\}$ が含まれていないことに注意して欲しい。

このような対象を多様体の定義と同じように局所的な扇の貼り合わせとして定義し直したのが次に述べるT複体である [I1]。

階数有限の自由加群 $N(\alpha)$ と実空間 $N(\alpha)_{\mathbf{R}}$ の中の非特異錐体 $c(\alpha)$ の組 $\alpha = (N(\alpha), c(\alpha))$ を非特異自由錐体と呼び、そのカテゴリーを $\mathcal{C}^{\mathrm{n.s.}}$ とする。ここで自由錐体の射 $u:\alpha\to\beta$ とは自由加群の同型 $u_{\mathbf{Z}}: N(\alpha)\to N(\beta)$ で $u_{\mathbf{R}} := u_{\mathbf{Z}}\otimes 1_{\mathbf{R}}: N(\alpha)_{\mathbf{R}}\to N(\beta)_{\mathbf{R}}$ により $u_{\mathbf{R}}(c(\alpha))$ が $c(\beta)$ の面となるものからなるとする。

カテゴリー $\mathcal{C}^{\mathrm{n.s.}}$ の有限部分カテゴリーを錐体グラフと呼ぶことにする。錐体グラフ Σ の射全体を $\mathrm{mor}\,\Sigma$ と書く。これは定義により有限集合である。

例 1.2 Φ を $N_{\mathbf{R}}$ の非特異扇とし Σ をその有限部分集合とする。Σ の各元 α に対し $N(\alpha) := N$ かつ $c(\alpha) := \alpha$ と定め $u:\alpha\to\beta$ は$\alpha,\beta\in\Phi$ かつ $u_{\mathbf{Z}} = 1_N$ のときに限り $u\in\mathrm{mor}\,\Sigma$ と定義すれば Σ は錐体グラフとなる。

Σ を錐体グラフとする。Σ の元 ρ に対し、$\Sigma(\rho\prec)$ で$\beta\in\Sigma$ と射 $v:\rho\to\beta$ の組 $\beta' = (\beta, v)$ からなる錐体グラフを表す。ここで $N(\beta') := N(\beta), c(\beta') := c(\beta)$ と定めるものとする。また同様に Σ での ρ への射全体から作られる錐体グラフを $\Sigma(\prec\rho)$ と書く。

錐体グラフ Σ の $\rho\in\Sigma$ でのリンク$\Sigma[\rho]$ は次のように定義される。各 $\beta' = (\beta, v)\in\Sigma(\rho\prec)$ に対し$\beta'[\rho]$ を $N(\beta'[\rho]) := N(\beta)[v_{\mathbf{R}}(c(\rho))]$ 及び $c(\beta'[\rho]) := c(\beta)[v_{\mathbf{R}}(c(\rho))]$ とし、$\Sigma[\rho] := \{\beta'[\rho]\ ;\ \beta'\in\Sigma(\rho\prec)\}$ と置く。これに $\mathrm{mor}\,\Sigma[\rho]$ を自然に定義すれば $\Sigma(\rho\prec)$ とカテゴリーとして同値で $\Sigma(\rho\prec)$ の各元とは、それぞれ $\dim\rho$次元低い自由錐体の錐体グラフ$\Sigma[\rho]$ が得られる。

定義 1.3 錐体グラフ Σ が次の条件を満たすときT複体と呼ぶ。

(1) Σ は空でなく連結である。

(2) 各 $\rho\in\Sigma$ に対して $\Sigma(\prec\rho)$ は $F(\rho)\setminus\{\mathbf{0}\}$ と錐体グラフとして同型である。

(3) 各 $\rho\in\Sigma$ に対して $\Sigma[\rho]$ は $N[\rho]_{\mathbf{R}}$ のある完全扇と同型である。

先に挙げた$\Delta := (\tilde{\Delta}\setminus\{\mathbf{0}\})/\Gamma$ は、次のように考えればT複体であることがわかる。

Δ をまず右辺のある完全代表系とし、$\alpha,\beta\in\Delta$ に対して射 $u:\alpha\to\beta$ は $u_{\mathbf{Z}}\in\Gamma$ であるときに限り $u\in\mathrm{mor}\,\Delta$ と定める。

すべてのT複体がこのように非特異扇の商として書けるわけではない。例えば、丁度多価関数 $\sqrt{z}$ から複素平面の2重分岐被覆を作るように、ある2次元非特異完全扇から0を除いたもののコピーを2つ用意して、その1つの1次元錐体のところで互い違いに張り合わせたものもT複体である。

T複体の定義は一見抽象的に見えるが、実際には非特異錐体の生成元と写像を表す行列の集まりを指定すれば良いので整数のデータのみで記述出来る対象である。従って、後で述べるようにT複体の不変量の具体的な計算にコンピューターを用いることも可能である。

ここで主に考えるのは土橋による一般次元のカスプ特異点の構成[T]から得られるT複体である。このカスプ特異点とは、組 $(C,\tilde{\Delta},\Gamma)$ で先の条件に加えて、C が凸でかつ閉包 $\bar{C}$ が $N_{\mathbf{R}}$ の直線を含まない場合に構成された正規孤立特異点である。このような $(C,\tilde{\Delta},\Gamma)$ から作られたT複体を双曲型T複体と呼ぶことにする。特異点自体は (C,Γ) のみによって定まるので $V(C,\Gamma)$ と書く。Δ はその非特異化及びその例外因子を表現している。例としてはヒルベルトモジュラーカスプ特異点などの数論的なものやそうでないものもあるが、まだ見付かっていないものが沢山あると思われる。

2 算術種数とゼータ零値

まず、r 次元非特異完備トーリック多様体のトッド種数について考える。

Δ が非特異完全扇の場合、各1次元錐体 $\gamma\in\Delta(1)$ に対しトーリック多様体 $X:=X(\Delta)$ の既約因子 $V(\gamma)$ が定まる[Od, Cor.1.7]。$\Delta(1)=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}$ とし、$D_i:=V(\gamma_i)$, $i=1,\cdots,s$ と置くと $D:=X\setminus T_N=D_1\cup\cdots\cup D_s$ である。

Θ_X を X の接ベクトル束とすると、連接層の完全列

$$0\to\mathcal{O}_X\otimes N\to\Theta_X\to\bigoplus_{1}^{s}\mathcal{O}_{D_i}(D_i)\to 0$$

が存在する。$\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$ の全チャーン類が因子類 $[D_i]$ により $1+[D_i]$ となることから X のトッド種数は

$$\mathrm{Todd}_r(X)=\left[\prod_{1}^{s}\frac{[D_i]}{1-\exp(-[D_i])}\right]_r$$

となる。ここで右辺は形式的に展開した因子類のべき級数の r次斉次部分についての交点数を表す。

しかし、ヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理により X のトッド種数はその算術種数に等しく、さらに X は有理多様体であることからこのトッド種数は1と

なる。ここに現れる交点数は非特異扇 Δ から計算出来る値なのでこれは非特異完全扇についての等式と考えられる。この等式の直接証明については [I2] を参照されたい。

r次元のT複体 Δ についてもトッド種数と同様のものが定義出来る。話を簡単にするため、基礎体は複素数体 $\mathbf{C}$ とし、$\Delta := (\tilde{\Delta} \setminus \{0\})/\Gamma$ とする。非特異扇 $\tilde{\Delta}$ から定義されるトーリック多様体 $X(\tilde{\Delta})$ を考えると $\tilde{D} := X(\tilde{\Delta}) \setminus T_N$ は一般には無限個の既約因子を持つ余次元1の部分多様体であるが、$\tilde{D}$ の通常位相でのある開近傍 $\tilde{U}$ を取れば、Γ が $\tilde{U}$ に自由に作用し $D := \tilde{D}/\Gamma$ がコンパクトとは限らない複素多様体 $U := \tilde{U}/\Gamma$ コンパクト因子となる。完全扇の時と同様に $\Delta(1) = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ と置くと、各 γ_i に対応する D の既約因子 D_i があって $D = D_1 \cup \cdots \cup D_s$ と書ける。そこで

$$\chi_\infty(\Delta) := \left[\prod_1^s \frac{[D_i]}{1-\exp(-[D_i])}\right]_r$$

と定義する。交点数が扇の局所的な配置から計算出来ることにより、この定義は一般のT複体についても拡張出来る [I2]。各交点数は当然整数であるが係数は一般に有理数であるから、$\chi_\infty(\Delta)$ は有理数となる。これをT複体 Δ の算術種数と呼ぶことにする。

さて次にゼータ零値の定義を与える。

組 $(C, \tilde{\Delta}, \Gamma)$ が双曲型T複体 Δ を与えるとする。開凸錐体 C の特性関数 $\phi : C \to \mathbf{R}_+$ を

$$\phi(x) := \int_{C^*} \exp(-\langle x^*, x\rangle) dx^*$$

と定義する。ここで、$C^* \subset M_{\mathbf{R}}$ は C の双対開錐体で $M_{\mathbf{R}}$ には格子点集合 M に関する単位立方体の体積が1となるように測度が入っているとする。$\phi(x)$ の持つ重要な性質は、それが Γ の作用で不変な C^∞ 級関数であって $\phi(cx) = c^{-r}\phi(x),\ c \in \mathbf{R}_+$ を満たすことである。カスプ特異点 $V(C, \Gamma)$ のゼータ関数は尾形により

$$Z(C, \Gamma; s) := \sum_{x \in (N \cap C)/\Gamma} \phi(x)^s$$

と定義され、これが全複素平面に有理型関数として解析接続されることが示された [Og]。また、それが $s = 0$ で正則であることが示され、その値 $Z(C, \Gamma; 0)$ を積分で表す公式も与えられた [Og]。

これは数論的なカスプ特異点の場合にノルム関数を使って定義されたものの拡張になっているが、C が等質錐体でない場合は定義に使われた特性関数と共にさほど自然なものとは言えない。

しかし、その零での値 $Z(0)(\Delta) := Z(C,\Gamma;0)$ は次に述べるようにT複体 Δ を記述する整数データから計算出来る値である。

自由錐体 $\alpha = (N(\alpha), c(\alpha))$ に対して $d(\alpha) := \dim c(\alpha)$ 及び $x(\alpha) := \prod_{x \in \mathrm{gen}\,\alpha} x$ と定義する。$x(\alpha)$ は $N(\alpha)_{\mathbf{Q}}$ の対称べき$\mathrm{S}^{d(\alpha)}(N(\alpha)_{\mathbf{Q}})$ の元である。カテゴリー $\mathcal{C}^{\mathrm{n.s.}}$ から $\mathbf{Q}$ ベクトル空間のカテゴリーへのファンクター D^0 を

$$D^0(\alpha) := \{f/x(\alpha)\,;\, f \in \mathrm{S}^{d(\alpha)}(N(\alpha)_{\mathbf{Q}})\}$$

で定義する。射 $u : \alpha \to \beta$ に対する $D^0(u) : D^0(\alpha) \to D^0(\beta)$ は同型 $u_{\mathbf{Z}} : N(\alpha) \simeq N(\beta)$ から得られる単射準同型とする。同じくファンクター $\mathbf{Q}^{\sim}$ をすべての α に対し $\mathbf{Q}^{\sim}(\alpha) := \mathbf{Q}$ かつすべての u に対し $\mathbf{Q}^{\sim}(u)$ が恒等写像と定義する。

任意の α について $\mathbf{Q} \subset D^0(\alpha)$ であることから自然なファンクターの準同型 $\epsilon : \mathbf{Q}^{\sim} \to D^0$ が得られる。これをT複体 Δ に制限したものを$\epsilon_\Delta : \mathbf{Q}^{\sim}_\Delta \to D^0_\Delta$ とする。これから帰納極限の写像

$$\mathbf{Q} = \mathrm{ind}\,\lim \mathbf{Q}^{\sim}_\Delta \longrightarrow \mathrm{ind}\,\lim D^0_\Delta$$

が得られる。この写像は単射であること [I1, Lem.3.1] が示されるので $\mathrm{ind}\,\lim D^0_\Delta$ は $\mathbf{Q}$ を含んでいると考える。

各 $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\omega(\alpha) := x(\alpha)^{-1}\left[\prod_{x \in \mathrm{gen}\,\alpha} \frac{x}{\exp(x) - 1}\right]_{d(\alpha)}$$

と置く。

$\mathrm{ind}\,\lim D^0_\Delta$ での $(\omega(\alpha))_{\alpha\in\Delta}$ の類を $\omega(\Delta)$ と書く。

次の定理が [I1] の主要な結果である。

定理 2.1 $\omega(\Delta) \in \mathrm{ind}\,\lim D^0_\Delta$ は $\mathbf{Q}$ に含まれ、この有理数は $Z(0)(C,\Gamma)$ に等しい。

一般に任意のT複体 Δ に対しても$\omega(\Delta) \in \mathrm{ind}\,\lim D^0_\Delta$ は有理数となりこれを $Z(0)(\Delta)$ と書くことにする。Φ を非特異完備扇とすると $\Delta := \Phi \setminus \{0\}$ はT複体であるが $Z(0)(\Delta) = -1$ となることも判る。

位相多様体のオイラー数が凸多面体の面の数に関するオイラーの定理から生まれたとすれば、T複体の不変量 χ_∞ 及び $Z(0)$ は、それぞれ非特異完備扇についての

等式 Todd$_r = 1$ 及び $Z(0) = -1$ から得られたオイラー数的な値と考えることが出来る。

以上でT複体 Δ に対する算術種数とゼータ零値の定義及び公式を与えたが、これらは Δ の具体的な例に対して計算可能である。

まず算術種数の方は交点数を求めれば良いが、局所的な問題なので $N_{\mathbf{R}}$ の非特異扇 Φ について説明する。$\Phi(1)$ の元 γ_1, γ_2 に対応する $X(\Phi)$ の因子 $V(\gamma_1)$ と $V(\gamma_2)$ が交わるのは$\gamma_1 + \gamma_2 \in \Phi$ のときに限る。また、各 $m \in M$ に対して

$$\sum_{\gamma \in \Phi(1)} \langle m, a_\gamma \rangle V(\gamma)$$

は零に線形同値である。ここで a_γ は $\mathrm{gen}\,\gamma = \{a_\gamma\}$ なる元である。これを使えば各交点数はすべて異なる既約因子の交点数の計算に還元される。これは相異なる $\gamma_1, \cdots, \gamma_r \in \Phi(1)$ について、交点数 $V(\gamma_1)\cdots V(\gamma_r)$ は$\gamma_1 + \cdots + \gamma_r \in \Phi(r)$ のとき1、それ以外は零であることから計算出来る。T複体の場合は局所的に非特異扇に置き換えることにより同様に計算出来る。

ゼータ零値の方は $\mathbf{Q}$ ベクトル空間のシステム D_Δ^0 を各ベクトル空間の基底を取って写像を行列で表し、$(\omega(\alpha))_{\alpha \in \Delta}$ を帰納極限の中で同値なものと取り代えながら $d(\alpha)$ の大きい順にα の要素を零にしていって、同値な $(a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ で $a_\alpha = 0, (d(\alpha) > 1)$ とできる。このとき、各 $\gamma \in \Delta(1)$ について $a_\gamma \in \mathbf{Q}$ となり、これらの和がゼータ零値である。

但し、奇数次元の場合は計算はもっと簡単でT複体 Δ のオイラー数を $e(\Delta) := \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\#\Delta(i)$ と定義すると$\chi_\infty(\Delta) = -Z(0)(\Delta) = e(\Delta)/2$ となることが佐武及び尾形により得られている。明らかなように、このオイラー数は偶数次元の場合は常に零である。

2次元の場合はカスプ特異点の非特異化の例外因子は非特異有理曲線の輪となる。既約因子は2つ以上あるとしてそれらの自己交点数を $a_1, \cdots, a_s$ とすると$\chi_\infty(\Delta) = -Z(0)(\Delta) = (\sum_{i=1}^{s} a_i + 3s)/12$ が成り立つ。

今までの例については $\chi_\infty(\Delta) = -Z(0)(\Delta)$ という関係があるが r が4以上の偶数の時は全く成り立たないようである。実際 [14] に於いてある星形化可能な14面体の面についての鏡映から生成される群により作られたT複体について計算した結果を紹介する。

これらは使っている C と Γ は同じものであるが格子点集合 N を取り代えることにより29種類のカスプ特異点を得ている。詳しい説明は省略するが左の欄の e_i

N を拡大させる元	$Z(0)$	χ_∞
元の格子	1/12	1/6
e_0	1/6	1/12
e_0+e_2	19/96	1/12
e_0+e_3	1/24	1/12
$e_0+e_2+e_3$	−5/96	7/12
e_2	−5/96	−5/12
e_2+e_3	19/96	1/12
e_3	1/24	1/3
e_0, e_1	1/3	1/24
e_0+e_2, e_1	19/48	1/24
e_0+e_3, e_1	1/12	1/24
$e_0+e_2+e_3, e_1$	−5/48	13/24
e_0+e_3, e_1+e_2	1/48	7/24
$e_0+e_2+e_3, e_1+e_2$	1/48	7/24
e_0, e_2	7/48	−5/24
e_0+e_3, e_2	−11/48	1/24
e_0, e_2+e_3	7/48	7/24
e_0+e_3, e_2+e_3	13/48	1/24
e_0, e_3	1/12	1/6
e_0+e_2, e_3	1/48	5/12
e_2, e_3	1/48	−1/12
e_0, e_1, e_2	13/24	−5/48
e_0+e_3, e_1, e_2	−5/24	7/48
e_0, e_1, e_2+e_3	1/24	19/48
e_0+e_3, e_1, e_2+e_3	7/24	7/48
e_0, e_1, e_3	1/6	1/12
e_0+e_2, e_1, e_3	1/24	1/3
e_0, e_2, e_3	1/24	1/12

表 1: ある 4 次元の例についてのゼータ零値と算術種数

は

$$e_0 = (1/2, 0, 0, 0),\ e_1 = (0, 1/2, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, 1/2, 0),\ e_3 = (0, 0, 0, 1/2)$$

である。実はここでは Δ を余り大きくしないために Γ は C に不動点を持つものを考えている。正確には Γ を指数有限の適当な部分群で取り換え不変量もその指数倍する必要がある。それでも Δ は数百から数千の錐体からなり計算にはパソコンを用いた。(X68000 だよ。)

これらは作り方からT複体を単体的複体と見たときの底空間は同位相である。従ってこれらの不変量は底空間のベッチ数等の不変量で記述出来るものでもないことが判る。

さて、$V(C,\Gamma)$ に対して、その双対カスプ特異点を次のように定義する。すでに C の特性関数の定義の中に出てきたが、C の双対錐体 $C^* \subset M_{\mathbf{R}}$ を

$$C^* := \{x \in M_{\mathbf{R}} \,;\, \langle x, a\rangle > 0, \forall a \in \bar{C} \setminus \{0\}\}$$

と定義する。C^* は凸な開錐体でその閉包は直線を含まない。また Γ を転置した群 $\Gamma^* := {}^t\Gamma$ が C^* に自由に作用している [T]。組 (C^*, Γ^*) から定まるカスプ特異点 $V(C^*, \Gamma^*)$ が $V(C,\Gamma)$ の双対カスプ特異点である。$V(C^*, \Gamma^*)$ の双対カスプ特異点は元の $V(C,\Gamma)$ となる。

定理 2.2 Δ 及び Δ' をそれぞれ互いに双対なカスプ特異点を定めるT複体とすると等式

$$\chi_\infty(\Delta) := (-1)^r Z(0)(\Delta')$$

及び

$$Z(0)(\Delta) := (-1)^r \chi_\infty(\Delta')$$

が成立する [I5]。

これは [SO] にある予想 (C3) が一般の（土橋）カスプ特異点について正しいことを示している。

この定理は中村による2次元カスプ特異点の双対性についての結果 [N] の拡張とも考えられる。実際、前に述べた非特異化での例外有理曲線の自己交点数の列を $a_1, \cdots, a_s$ とすると、その双対カスプ特異点に対する列 $b_1, \cdots, b_t$ との間に

$$(a_1 + \cdots + a_s + 3s) = -(b_1 + \cdots + b_t + 3t)$$

という関係がある。これは等式

$$12\chi_\infty(\Delta) := 12Z(0)(\Delta')$$

に外ならない。

この定理 2.2の証明には [B] 及び [S2] の結果を用いた。([I2]、[I5] 参照)

結果論でいえばカスプ特異点 $V(C,\Gamma)$ のゼータ関数は双対開錐体 C^* で定義するべきであったとも言えるが、算術種数及びゼータ零値が C の分割から得られたT複体から自然にに計算出来るオイラー数的な値であることからT複体の不変量としてはこのままの定義が良いことになる。従ってこの定理は、幾何学的対象としての双曲型T複体の双対性を示すものと考えるのが適当と思われる。

3 T複体の交点理論

ここではT複体のチャウ環を考えトーリック多様体の交点理論との関連で今後の問題となりそうなことについて述べる。

Δ を r 次元のT複体とする。各 $0 < k \le r$ に対して $Z^k(\Delta)$ を $\{[\alpha]\,;\,\alpha \in \Delta(k)\}$ を基底とする $\mathbf{Q}$ ベクトル空間とする。$\deg : Z^r(\Delta) \to \mathbf{Q}$ を $\deg(\sum a_\sigma[\sigma]) := \sum a_\sigma$ と定義して $A^r(\Delta) := Z^r(\Delta)/\ker\deg$ と置く。また各 $0 < k < r$ に対して双線形写像 $Z^k(\Delta) \times Z^{r-k}(\Delta) \to \mathbf{Q}$ を χ_∞ の計算のなかで行ったトーリック多様体での交点数により定義する。そしてこれが完全になるように各 $Z^k(\Delta)$ を割って出来た $\mathbf{Q}$ ベクトル空間を $A^k(\Delta)$ と書くことにする。$A^0(\Delta) := \mathbf{Q}$ と置き $A^*(\Delta) := \oplus_{k=0}^r A^k(\Delta)$ とすると $A^*(\Delta)$ は自然に次数付き可換環となる。これをT複体 Δ のチャウ環と呼ぶことにする。

$A^1(\Delta)$ の元を因子類または単に因子と呼ぶが、因子類 ξ のアンプル性を、任意の $\tau \in \Delta(r-1)$ に対し $\langle \xi, [\tau] \rangle > 0$ と定義する。

2次元のT複体は必ずアンプルな因子類を持つが、3次元以上では射影トーリック多様体を定義する非特異完備扇の有限群による商か、または双曲型T複体の一部に限り存在する様である。

$\xi \in A^1(\Delta)$ がアンプルとするとき、各 k について $L(\xi) : A^k(\Delta) \to A^{k+1}(\Delta)$ を ξ をかける線形写像と定義する。このときレフシェッツ型の定理、つまり各 $0 < k < r/2$ に対して

$$L(\xi)^{r-2k} : A^k(\Delta) \to A^{r-k}(\Delta)$$

が同型となることが予想される。これは非特異完備扇の場合はレフシェッツの定理をトーリック多様体に適用することにより正しいことが判るが、扇を直接使った組み合わせ論的な証明が期待されている。

また r が偶数 $2s$ のとき $A^s(\Delta)$ に自然にはいる２次形式の符号数は幾つかという問題もある。トーリック多様体の場合はホッジの指数定理により、対応する非特異完備扇を Φ とすると符号数は$\sum_{k=0}^{r}(-2)^{r-k}\#\Phi(k)$ となることが知られている。

これらは言い換えるとＴ複体についてグロタンディエックのスタンダード予想はどうかということになる。

ここで定義したＴ複体は、底空間が位相多様体であるような単体的複体の各隣接する単体同士にそれらの位置関係を与えたようなもので、有限な整数のデータで記述出来るものである。それでも非特異代数多様体と似た扱いが出来るところに興味が持たれる。

参考文献

[ADS] M.F. Atiyah, H. Donnelly and I.M. Singer, Eta invariatnts, signature defects of cusps, and values of L-functions, Ann. of Math., **118**, (1983), 131-177.

[B] M. Brion, Point entiers dans les polyèdres convexes, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **21**, (1988), 653-663.

[HG] F. Hirzebruch and G. van der Geer, Lectures on Hilbert Modular Surfaces, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1981.

[I1] M.-N. Ishida, T-complexes and Ogata's zeta zero values, Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and Academic Press, Boston, San Diego, New York, Berkeley, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1989, 351-364.

[I2] M.-N. Ishida, Polyhedral Laurent series and Brion's equalities, International J. Math. **1**, (1990),251-265.

[I3] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. **32**(1980), 111-146.

[I4] M.-N. Ishida, Cusp singularities given by stellable cones, to appear in International J. Math.

[I5] M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, to appear in Math. Ann.

[M] W. Müller, Signature defects of cusps of Hilbert modular varieties and values of L-series at $s = 1$, J. Diff. Geom., **20**, (1984), 55-119.

[N] I. Nakamura, Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities. I, Math. Ann. **252**, (1980), 221-235.

[Od] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math.(3) **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

[Og] S. Ogata Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37**, (1985), 367-384.

[S1] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of Q-rank one, Progress in Math., 46, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1984, 353-369.

[S2] R. Sczech, Cusps on Hilbert modular varieties and values of L-functions, Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and Academic Press, Boston, San Diego, New York, Berkeley, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1989, 29-40.

[SC] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Lie Groups: History, Frontiers and Applications IV, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975.

[SO] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and Academic Press, Boston, San Diego, New York, Berkeley, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1989, 1-27.

[T] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, (1983), 607-639.